ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Ιανουάριος 2014.

ΘΕΜΑ 1: Στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο (ή Ευκλείδειο) $\mathbb{R}^4$ θεωρούμε τον υπόχωρο:
$V=\{(s+t-2u,\ -s+t+2u,\ -2s+t+4u,\ 2s-3t-4u) \mid t,s,u\in\mathbb{R}\}$
Να βρεθεί υπόχωρος W τέτοιος ώστε:
$V\cap W=\langle(0,2,3,-5)\rangle$ και $V+W=\{(x,y,z,w)\mid x+y+z+w=0\}$
Να προσδιοριστούν οι βάσεις και διαστάσεις των υποχώρων $V, W, V+W$. Έπειτα, να βρεθούν υπόχωροι V', W' και U' τέτοιοι ώστε:
$\mathbb{R}^4=V\oplus V'=W\oplus W'=(V\oplus W)\oplus$

ΘΕΜΑ 2
Να βρεθεί ο αντίστροφος του ακόλουθου πίνακα

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ -4 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

και γράψτε τον ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων

ΘΕΜΑ 3: Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $T:V\to W$. Μία βάση του V είναι η $\{a_1,\dots,a,b_1,\dots,b_n\}$ και μία βάση του W είναι $\{w_1,\dots,w_n\}$ και ισχύει ότι: $T(a_1)=T(b_1)=w_1,\dots,T(a_n)=T(b_n)=w_n$. Δείξτε ότι το σύνολο $\{a_1-b_1,\dots,a_n-b_n,\dots,b_1,\dots,b_n\}$ αποτελεί βάση του V. Τέλος, να δειχθεί ότι το σύνολο $\{a_1-b_1,\dots,a_n-b_n\}$ αποτελεί βάση της T.

ΘΕΜΑ 4: Να υπολογιστεί η ορίζουσα του nxn πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & a & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & a & \cdots & a & 1 & 1 \\ a & a & a & a & \cdots & a & a & 1 \end{bmatrix}$$

ΘΕΜΑ 5: Εάν ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ από τη βάση $a = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ στη βάση $b = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$ είναι ο εξής:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Βρείτε τα ακόλουθα:

i) τον τύπο της T

ii) μία βάση του πυρήνα και μία βάση της εικόνας της T

iii) Τον πίνακα B της T από τη βάση:
$\gamma = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ του $\mathbb{R}^3$ στη βάση:
$\delta = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ του $\mathbb{R}^4$

iv) αντιστρέψιμους πίνακες Q και P έτσι ώστε $B=QAP$

ΘΕΜΑ 6: Να βρεθούν τα $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα:

$$
\begin{aligned}
x - y + 3z &= b \\
2x - 2y + az &= 2a - b \\
3x + ay + z &= 1 \\
3x - 3y + (a+3)z &= 2a
\end{aligned}
$$

i) να έχει μοναδική λύση

ii) να μην έχει καμία λύση

iii) να έχει άπειρες λύσεις

Στις περιπτώσεις όπου έχει λύσεις, να τις βρείτε